

BERPIKIR *PSEUDO* PENALARAN KOVARIASI DALAM MENGONSTRUKSI GRAFIK FUNGSI KEJADIAN DINAMIK: SEBUAH ANALISIS BERDASARKAN KERANGKA KERJA VL2P DAN IMPLIKASINYA PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Subanji

Abstract: This article discusses the thinking process of pseudo covariational reasoning in constructing graphs of dynamic events. The reasoning is examined using the VL2P framework (Vinner, Lithner, Leron, and Pape). The thinking process of one student taking Calculus II course was analysed, followed with interviews, revealing that at the low level, the pseudo covariational reasoning was close to Vinner's pseudo analytic; that higher level of reasoning was equal to Lithner's Establish Experience; that the reasoning was dominantly affected by the first process of Leron's Dual Process Theory; and that it took place when direct translation was involved consistent with Pape's Direct Translation Approach. These suggest that process view be emphasized in mathematics teaching and learning.

Kata kunci: proses berpikir, pseudo penalaran kovariasi, grafik, kejadian dinamik.

Dalam proses belajar mengajar, kebanyakan pengajar matematika mengajarkan prosedur tanpa menjelaskan mengapa prosedur tersebut digunakan. Sehingga siswa beranggapan bahwa dalam menyelesaikan masalah, cukup memilih prosedur penyelesaian yang sesuai dengan masalah yang diberikan. Dalam hal ini fokus pembelajaran tidak pada mengapa prosedur tertentu itu yang digunakan untuk menyelesaikan, tetapi prosedur mana yang dipilih untuk menyelesaikan masalah dan pada bagaimana menyelesaikan dengan prosedur tersebut. Akibatnya banyak siswa yang kurang menggunakan daya nalarnya dan kurang mampu bernalar secara baik. Seringkali dalam menyelesaikan suatu masalah, siswa berpikir seolah-olah mengikuti proses penalaran, namun sebenarnya proses berpikir siswa tersebut belum sesuai dengan proses penalaran. Selanjutnya proses berpikir siswa seperti ini disebut sebagai proses berpikir pseudo penalaran. Pseudo penalaran adalah penalaran yang semu. Proses berpikir pseudo penalaran merupakan proses berpikir yang nampak "seperti" proses penalaran, namun sebenarnya belum merupakan proses penalaran yang sebenarnya.

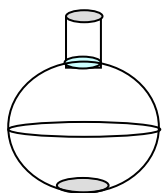
Proses berpikir pseudo telah dikaji oleh banyak peneliti dengan konteks dan istilah yang berbeda-

beda. Vinner (1997) menggunakan istilah *Analitik* dan *Pseudo Analitik* dalam konteks pemecahan masalah matematika rutin. Lithner (2000) menggunakan istilah *Establish Experience* (EE) dan *Plausible Reasoning* (PR) dalam konteks pemecahan masalah non rutin. Leron (2005) mengkaji *Dual Process Theory* dalam konteks pemecahan masalah aljabar. Dan Pape (2004) menggunakan istilah *Direct Translation Approach* (DTA) dan *Meaning Based Approach* (MBA) dalam konteks pemecahan soal cerita.

Dalam tulisan ini dikaji proses berpikir pseudo analitik pada penalaran kovariasi, yang disebut *pseudo penalaran kovariasi* dan implikasinya pada pembelajaran matematika. Tugas penalaran kovariasi berkaitan dengan mengkonstruksi grafik fungsi kejadian dinamik. Carlson (2002) mendefinisikan penalaran kovariasi sebagai aktifitas kognitif melibatkan pengkoordinasian dua macam kuantitas yang berkaitan dengan cara-cara dua kuantitas tersebut berubah satu terhadap yang lain. Slavits (1997) mendefinisikan kovariasi sebagai kegiatan menganalisis, memanipulasi, dan memahami hubungan antara perubahan kuantitas.

TUGAS KOVARIASI

Bayangkan botol di bawah ini diisi dengan air. Gambarkan sebuah grafik ketinggian air dalam botol terhadap banyaknya air yang dimasukkan.

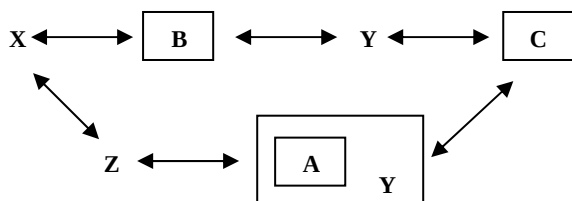


Dalam tulisan ini, penalaran kovariasi didefinisikan sebagai aktifitas mental dalam pengkoordinasian dua kuantitas (variabel bebas dan variabel terikat) yang berkaitan dengan cara-cara perubahan satu kuantitas terhadap kuantitas yang lain.

Subyek penelitian adalah 32 orang mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah kalkulus II. Namun dalam tulisan ini, analisis difokuskan pada jawaban seorang mahasiswa terhadap tugas kovariasi. Untuk mengkaji proses berpikir secara mendalam dilengkapi dengan hasil wawancara. Selanjutnya proses berpikir pseudo penalaran kovariasi dikaji berdasarkan kerangka kerja VL2P (Vinner-Lithner-Leron-Pape) yang terdiri dari: Analitik vs Pseudo Analitik (Vinner, 1997); *Establish Experience* (EE) vs *Plausible Reasoning* (PR), (Lithner, 2000); *Dual Process Theory* (Leron, 2005); dan *Direct Translation Approach* (DTA) vs *Meaning Based Approach* (MBA), (Pape, 2004).

Analisis Berpikir Pseudo Penalaran Kovariasi Berdasarkan Kerangka Kerja VL2P Berpikir Pseudo Penalaran Kovariasi Berdasarkan Kerangka Kerja: Analitik Vs Pseudo Analitik (Vinner, 1997)

Proses berpikir analitik dalam menyelesaikan masalah oleh Vinner (1997) digambarkan seperti berikut.



Gambar 1. Proses Berpikir Analitis

Dalam gambar itu:

- (A) sebuah kumpulan dari prosedur penyelesaian
- (B) skema mental untuk memahami tipe-tipe masalah matematika yang diberikan dan struktur khususnya

- (C) Skema mental untuk memahami sebuah prosedur penyelesaian yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang sesuai dengan tipe dan struktur yang telah ditentukan.

Ketika masalah X diberikan kepada siswa, berikut proses yang terjadi (1) B diaktifkan oleh X. Sebuah analisis dilakukan dalam rangka menentukan tipe dan struktur dari X. Tipe dan struktur dinyatakan oleh Y; (2) C diaktifkan oleh Y. Selanjutnya memilih prosedur penyelesaian dari A, sebut saja Z; (3) Z diterapkan ke X dan menghasilkan solusi untuk X

Tipe dan struktur dari masalah yang diberikan, yakni X tergantung pada kumpulan prosedur yang dimiliki oleh seseorang. Misalkan diberikan masalah nilai ekstrim, akan dapat diproses apabila seseorang memiliki pengetahuan kalkulus yang terkait dengan masalah nilai ekstrim. Seseorang mampu mengidentifikasi masalah program linear, hanya jika dia telah mempelajari program linear. Proses penentuan tipe dan struktur dari masalah yang diberikan X bukan merupakan proses searah. Hal ini bisa merupakan proses mundur dan maju. Pada saat seseorang diberi masalah, ia akan mencermati tipe dan strukturnya. Ketika tipe dan strukturnya dirasakan belum lengkap atau mungkin belum sesuai, maka ia akan mendalami masalahnya lagi. Proses ini bisa berupa *trial and error*. Pada saat tipe dan struktur sudah diperoleh, yakni Y, maka akan dilanjutkan dengan membangkitkan skema mental C yang digunakan untuk memahami prosedur penyelesaian yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah sesuai dengan tipe dan struktur yang diketahui. Ketika prosedur penyelesaian ditemukan tetapi tidak sepenuhnya sesuai dengan tipe dan strukturnya, maka proses akan kembali ke pengkajian tipe dan struktur masalah lagi. Pemahaman masalah memainkan peranan yang besar dalam proses ini. Ia dapat memiliki bagian yang dipandu oleh asosiasi yang acak dan tak terkontrol, tetapi kemudian pada ukuran kontrol diambil, keluarannya diuji secara analitik dan tindakan secara cepat diambil. Dua anak panah mengindikasikan adanya sub proses maju atau mundur yang diambil sebelum proses akhir yang dibuat.

Berikut ini akan disajikan 2 contoh yang menggambarkan proses di atas dalam sebuah skema, yakni luas persegi panjang. Bagian pertama menggambarkan proses berpikir analitik yang sederhana, dan bagian kedua proses berpikir analitik yang lebih kompleks dalam kejadian sederhana.

Contoh 1:

X: tentukan luas persegi panjang yang sisi-sisinya 7 cm dan 5 cm.

Sebuah proses berpikir yang mungkin adalah sebagai berikut.

- (1) *Ini merupakan masalah luas. Luas dari persegi panjang. Dalam masalah ini, dua sisi dari persegi panjang telah diberikan* (tipe masalahnya adalah: masalah luas persegi panjang. struktur dari masalah adalah dua sisi diberikan. Tugasnya menentukan luas).
- (2) *Luas persegi panjang adalah hasil kali sisi-sisinya* (di sini prosedur penyelesaiannya telah dipilih).
- (3) *Sisi-sisi dalam kasus ini adalah 7 dan 5 dan karena itu luasnya $7 \times 5 = 35 \text{ cm}^2$* (prosedur yang dipilih digunakan untuk menentukan jawaban).

Contoh 1 hanya sedikit memiliki muatan analitik, namun hal ini dapat dipertimbangkan sebagai sebuah skema representasi dari proses.

Contoh 2:

X: Tentukan luas persegi panjang yang salah satu sisinya 7 cm dan kelilingnya 24 cm.

Proses berpikir analitik yang mungkin dalam menyelesaikan masalah ini adalah sebagai berikut.

- (1) *Ini merupakan masalah luas. Luas dari persegi panjang. Luas persegi panjang merupakan hasil kali sisi-sisinya. Tetapi hanya satu sisi yang diberikan dalam pertanyaan ini. Di sisi lain keliling juga diberikan. Keliling adalah dua kali dari jumlah sisi-sisi yang berdekatan. Dengan demikian memungkinkan untuk menemukan sisi lain dari persegi panjang tersebut.* (Dalam kasus ini urutan menentukan tipe dan struktur dari masalah perlu mempertimbangkan A, kumpulan dari prosedur penyelesaian. Tipenya adalah luas persegi panjang. Struktur, tetapi bukan struktur bersama, karena hanya satu sisi yang diberikan. Ini cukup untuk menentukan strategi untuk menemukan sisi kedua dari persegi panjang. Akibatnya harus mengidentifikasi prosedur penyelesaian untuk masalah lain: diberikan satu sisi dan keliling dari persegi panjang, tentukan sisi kedua dari persegi panjang tersebut. Jadi prosedur untuk menentukan tipe dan struktur dari masalah yang diberikan menunjukkan penentuan penyelesaian tipe dan struktur yang lain, secara implisit mengikuti masalah aslinya).
- (2) *Untuk menentukan sisi kedua dari persegi panjang, dapat dilakukan dengan membagi keliling dengan 2 dan mengurangi dengan sisi yang diberikan. Rumus keliling: $K = 2(a+b)$, dimana K adalah keliling persegi panjang dan a, b sisi-sisi persegi panjang. Setelah menemukan kedua sisi, kalikan kedua sisi tersebut untuk menemukan luas persegi panjang.*

- (3) $24/2 = 12$; $12 - 7 = 5$; $7 \times 5 = 35$; jadi luasnya 35 cm^2 .

Penjelasan di atas mengindikasikan kompleksitas proses berpikir yang melibatkan kejadian sederhana. Dalam sub masalah diidentifikasi, dianalisis, dan diselesaikan selama menganalisis masalah. Dalam proses identifikasi ditemukan tipe masalahnya adalah keliling dan strukturnya adalah salah satu sisinya diketahui. Selanjutnya dianalisis hubungan antara keliling dan sisi yang diketahui, bahwa keliling merupakan dua kali jumlah sisi berdekatan. Dari hubungan antara keliling dan sisi dapat digunakan untuk mencari sisi yang lainnya. Jadi proses yang dideskripsikan dalam masalah utama juga diterapkan pada sub masalah.

Kedua contoh di atas menggambarkan proses berpikir analitik dan berperilaku analitik dalam pemecahan masalah. Selanjutnya akan dideskripsikan model berpikir dan perilaku yang disebut pseudo analitik. Dalam kegiatan belajar mengajar di sekolah siswa senantiasa terlibat dengan tugas sekolah, pekerjaan rumah, dan ujian yang akan menentukan kelanjutan sekolahnya. Karena itu siswa cenderung tidak peduli dengan proses berpikirnya. Mereka lebih peduli dengan jawaban yang telah diberikan, apakah jawabannya dapat diterima atau tidak, apakah yang dilakukan benar atau tidak. Dan yang lebih penting lagi bagi siswa adalah memberi jawaban yang benar. Dengan usaha minimal dapat memperoleh jawaban benar. Dalam kasus luas persegi panjang, guru akan memperluas rumus $L = ab$. Dalam hal ini metode menyelesaikan masalah luas diberikan setelah aturan perhitungan luas diberikan kepada siswa. Karena itu bila masalah luas diberikan, siswa akan mencoba mengingat tipe dan struktur yang sama dengan masalah yang pernah dihadapi. Mereka akan menerapkan prosedur penyelesaian untuk pertanyaan yang setipe. Dalam kasus luas ini mereka akan mengalikan dua bilangan yang diberikan dalam pertanyaan. Jadi kemungkinan proses berpikir pseudo analitik yang terjadi dari kedua contoh di atas adalah sebagai berikut.

Proses berpikir pseudo analitik pada contoh 1

- (1) *X merupakan pertanyaan yang sama dengan yang telah dipelajari siswa tentang luas persegi panjang.*
- (2) *Pertanyaan ini dijawab dengan mengalikan dua bilangan yang diberikan dalam pertanyaan.*
- (3) *Dua bilangan dalam kasus ini adalah 7 dan 5, karena itu hasilnya $7 \times 5 = 35$. Jadi jawabannya adalah 35 cm^2 .*

Jawaban yang dihasilkan siswa pada proses berpikir pseudo analitik bisa sama dengan hasil proses

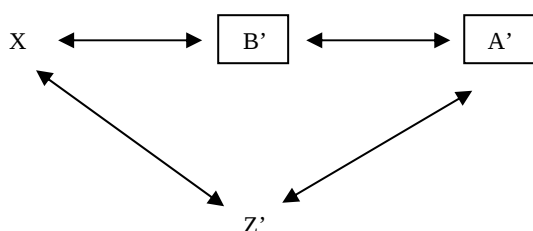
berpikir analitik, namun penalaran yang digunakan berbeda.

Proses berpikir pseudo analitik pada contoh 2

- (1) Masalahnya adalah luas persegi panjang.
- (2) Jawaban masalah ini ditentukan dengan mengalikan dua bilangan dalam pertanyaan.
- (3) Dua bilangan dalam pertanyaan tersebut adalah 24 dan 7. Karena itu jawabanya $24 \times 7 = 168$.

Dalam kasus kedua, proses berpikir pseudo analitik menghasilkan jawaban yang salah. Dalam hal ini siswa hanya menggunakan *superficial similarities*, yakni kesamaan masalah yang dangkal. Siswa tidak melakukan kontrol terhadap masalah yang diberikan dan hanya melihat luas sebagai hasil kali dua satuan panjang, sehingga menghasilkan jawaban yang salah. Jadi proses berpikir pseudo analitik bisa menghasilkan jawaban benar atau jawaban salah.

Menurut Vinner (1997), proses berpikir pseudo analitik dapat digambarkan seperti diagram berikut.



Gambar 2. Proses Berpikir Pseudo Analitik

Seorang siswa yang menggunakan proses berpikir pseudo analitik, akan mengikuti proses berikut.

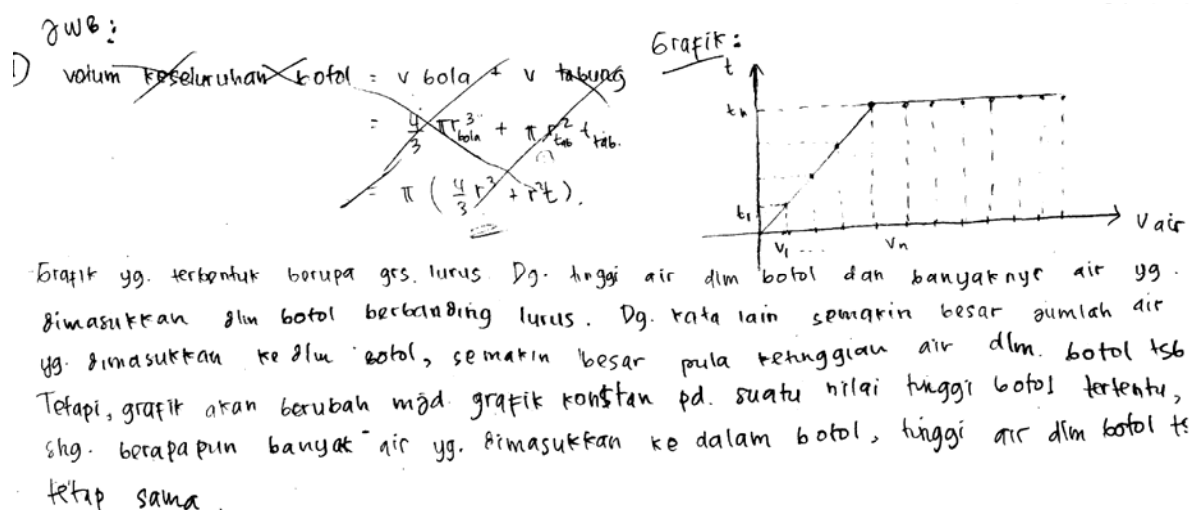
- (A') Sebuah kumpulan tipe-tipe pertanyaan dan prosedur penyelesaiannya.
- (B') Skema mental yang berlaku adalah kesamaan dari pertanyaan yang diberikan ke pertanyaan A' yang ditentukan.

Ketika sebuah masalah X diberikan kepada siswa yang berada dalam model berpikir pseudo analitik, maka akan terjadi proses berikut.

- (1) B' diaktifkan oleh X. B' akan beraksi pada A' yang dilanjutkan dengan mengidentifikasi masalah Z' yang sama dengan X. (Z' tidak perlu diformulasikan dalam kata-kata di benak. Tetapi dapat terjadi dalam ingatan secara samar-samar (*fuzzy memory*))
- (2) Prosedur penyelesaian untuk Z' diterapkan ke X.

Proses berpikir pseudo analitik lebih sederhana dan lebih pendek dari proses berpikir analitik. Karakteristik dominan dari perilaku pseudo analitik adalah ketiadaan prosedur kontrol. Seseorang merespon secara spontan tanpa menyadari apa yang dikerjakannya dalam ujian. Saat hasil telah ditemukan ada, tidak ada lagi dorongan untuk mengontrol (memeriksa) kebenaran jawaban.

Dalam konteks penalaran kovariasi, salah satu grafik yang dibuat oleh subyek (F) dalam masalah kovariasi disajikan seperti berikut.



Pada saat diberi tugas kovariasi, subyek membaca masalah dan secara spontan merespon bahwa bentuk botol berupa bola dan tabung, kemudian langsung menuliskan volume botol sebagai penjumlahan volume bola dan volume tabung.

$$\begin{aligned}
 \text{Volume botol} &= \text{volume bola} + \text{volume tabung} \\
 &= \frac{4}{3} \pi r^3 + \pi r^2 t \\
 &= \pi \left(\frac{4}{3} r^3 + r^2 t \right)
 \end{aligned}$$

Setelah berpikir agak lama subyek kesulitan menggambarkan grafik dari rumus yang sudah diperolehnya, kemudian mencari alternatif lain dengan memikirkan hubungan antara volume dan ketinggian botol secara langsung. Dia menemukan bahwa semakin besar jumlah air yang dimasukkan ke dalam botol, semakin besar pula ketinggian air dalam botol. Karena itu grafiknya berupa garis lurus. Grafik berubah menjadi grafik konstan setelah mencapai ketinggian botol tertentu. Berapapun banyak air dimasukkan ke dalam botol, tinggi air tersebut tetap sama, karena kelebihan air akan tumpah. Dalam hal ini subyek tidak menangkap informasi berkaitan dengan bentuk botol yang berbeda di setiap ketinggian. Sehingga dia cukup menggambarkan grafik berupa garis lurus. Dia tidak melakukan refleksi lagi.

Pada saat wawancara, subyek mulai bernalar secara maksimal dengan mengadakan refleksi terhadap jawabannya. Akhirnya subyek menyadari bahwa jawabannya masih kurang sesuai. Berikut petikan wawancara peneliti dan subyek (F).

P: Coba jelaskan bagaimana kamu bisa menghasilkan jawaban seperti ini! (peneliti menunjuk ke gambar yang dibuat oleh subyek).

F: Bila botol ini diisi air, maka ketinggian air semakin besar. Jadi volume dan ketinggian berbanding lurus. Em.. (F berpikir sejenak). Tapi ini luas penampangnya berbeda. (dia membandingkan bagian bawah dan bagian atas botol). Saya kira jawaban saya ini salah.

P: Terus, jawaban yang menurut kamu betul, bagaimana?

F: Mungkin grafiknya naik, tetapi tidak lurus begini. (berpikir agak lama dan akhirnya menemukan jawaban benar). Di bagian bawah, ketinggiannya naik secara cepat, semakin ke tengah semakin lambat.

P: Kenapa?

F: Karena penampangnya semakin besar.

P: Terus, bagaimana pada saat di tengah dan ke atasnya?

F: (berpikir agak lama). Oh ya, saya kira Perubahan ketinggian paling lambat pada saat di tengah. Selanjutnya naik lebih cepat lagi, sampai ke atas.

Dari proses berpikir menyelesaikan masalah kovariasi, nampak bahwa pada tahap awal, tipe dan struktur yang direspon adalah bentuk bola dan tabung dan secara spontan dia mengkaitkan dengan rumus volume bola dan volume tabung. Dalam hal ini subyek hanya menggunakan *superficial similarities*, yakni kesamaan masalah yang dangkal. Jika bola dikaitkan dengan volume, maka subyek secara spontan (otomatis) menuliskan rumus volume bola

dan tabung. Pada tahap awal ini siswa menggunakan proses berpikir pseudo analitik, karena proses dilakukan secara spontan dan menggunakan *superficial similarities*. Pada proses berpikir tahap pertama tersebut siswa belum menggunakan penalaran yang sesungguhnya. Siswa belum mengkaitkan cara-cara perubahan ketinggian bila volume air ditambah (penalaran kovariasi). Penalaran kovariasi yang dilakukan masih semu (pseudo penalaran kovariasi).

Berpikir Pseudo Penalaran Kovariasi Berdasarkan Kerangka Kerja: *Plausible Reasoning (Pr)* Dan *Establish Experience (Ee)* (Lithner, 2000)

Lithner (2000) mengkarakterisasi proses berpikir dalam menyelesaikan tugas matematika menjadi dua macam, yakni *plausible reasoning* (PR) dan *establish experience* (EE). Proses berpikir PR dan EE merupakan perluasan dari analitik dan pseudo analitik yang dikemukakan Vinner. Perbedaan antara analitik dan PR, terletak pada derajat kepastiannya, dimana PR derajat kepastiannya lebih tinggi. Sedangkan perbedaan antara pseudo analitik dan EE adalah derajat keanalitikannya, EE lebih sedikit ketidak analitikannya dibandingkan pseudo analitik.

Proses berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah didiskripsikan oleh Lithner (2000) dalam empat struktur berikut (1) Memahami masalah, masalah yang dihadapi mungkin tidak jelas bagaimana harus diproses; (2) Memilih strategi, seseorang mungkin mencoba untuk memilih (dalam pengertian lebih luas: memilih, mengingat, mengkonstruksi, menemukan, dan sebagainya) suatu strategi yang dapat menyelesaikan kesulitan. Pilihan ini dapat didukung dengan argumentasi yang bersifat prediksi: apakah strategi ini akan menyelesaikan masalah? Jika tidak, memilih strategi yang lain; (3) Implementasi strategi, hal ini didukung dengan argumentasi yang bersifat verifikasi: apakah strategi ini telah mampu menyelesaikan kesulitan? Jika tidak, mengulangi 2 atau 3 tergantung pada pilihan strategi atau dalam implementasi strategi yang masih menjadi masalah; (4) Kesimpulan: hasil yang diperoleh.

Struktur 1 – 4 dari proses berpikir siswa tersebut dikatakan sebagai proses berpikir PR bila:

- (i) komponen-komponen yang dilibatkan dalam penalaran memuat sifat-sifat matematika
- (ii) dimaksudkan untuk memandu ke arah jawaban benar, tidak harus sampai pada jawaban yang lengkap atau benar.

Struktur 1-4 dikatakan sebagai proses berpikir EE bila bagian (i) ditemukan dari pemahaman dan prosedur yang didasarkan pada pengalaman yang dimiliki oleh seseorang dari belajar di kelas.

Sebagai contoh, ketika mahasiswa diberikan tugas maksimasi dalam kalkulus, proses berpikir PR mungkin dapat terjadi seperti berikut.

1. Situasi masalah: T adalah tugas maksimasi dalam kalkulus. Apa yang harus dikerjakan untuk menyelesaikan T?
2. Memilih strategi: Bila seseorang melihat grafik sebuah fungsi sebagai bukit dan lembah, maksimum ditemukan di puncak bukit. Di puncak kemiringannya nol, dan kemiringan didiskripsikan sebagai turunan. Jadi T diselesaikan dengan menguji titik dimana $f'(x) = 0$.
3. & 4. Implementasi strategi dan kesimpulan. Jika seseorang sudah terbiasa dengan prosedur ini, maka ia akan langsung menggunakannya.

Sedangkan proses berpikir EE dapat terjadi bila dalam memilih strategi (bagian 2): penyelesaian semua tugas maksimasi adalah menemukan di mana $f'(x) = 0$. Jadi T diselesaikan dengan menemukan dimana $f'(x) = 0$.

Dalam konteks penalaran kovariasi, setelah subyek melakukan operasi aljabar terhadap rumus volume bola dan tabung, ternyata tidak bisa menghasilkan grafik, maka berlanjut pada proses berpikir kedua: mengkaji hubungan antara perubahan ketinggian dan volume air. Dari pernyataan yang dituliskan dalam jawaban terlihat bahwa dia telah mendapatkan hubungan antara tipe dan struktur (volume dan ketinggian). Semakin banyak air yang dimasukkan ke dalam botol, ketinggiannya semakin besar (meningkat). Dalam hal ini subyek telah melakukan proses penalaran kovariasional, namun masih belum sempurna, karena dia masih belum memperhatikan cara-cara perubahan ketinggian terhadap volume secara teliti. Proses berpikir yang terjadi masih dangkal, hanya memandang: ketika volume ditambah, maka ketinggian bertambah. Sehingga proses penalaran kovariasionalnya masih semu (pseudo penalaran kovariasi) pada tingkatan EE.

Berpikir Pseudo Penalaran Kovariasi Berdasarkan Kerangka Kerja: *Dual Process Theory* (Leron, 2005)

Dalam *dual process theory* (Leron, 2005), proses dan perilaku dalam menyelesaikan tugas dapat dikelompokkan menjadi dua model berbeda yang disebut dengan proses system 1 (S1) dan proses system 2 (S2). Proses S1 memiliki karakteristik: cepat, otomatis, tanpa berupaya, tak sadar, dan tak fleksibel (susah berubah); proses S1 dapat dipengaruhi oleh bahasa dan terkait dengan kejadian yang bukan di sini dan sekarang (yaitu kejadian yang tempatnya jauh dan waktunya dulu atau akan datang).

Proses S2 adalah lambat, hati-hati, upaya keras, perhitungan matang, dan relative fleksibel. Dua sistem yang berbeda secara pokok pada dimensi “menangkap”: bagaimana kecepatannya dan bagaimana kemudahannya sesuatu sampai ke otak (mind). Dalam banyak situasi, S1 dan S2 bekerja bersama menghasilkan jawaban yang sesuai, tetapi dalam beberapa kasus (seperti suatu masalah yang non rutin), S1 menghasilkan jawaban tidak sesuai (*non normative*) dengan cepat dan otomatis, selagi S2 tidak mengontrol dengan cara mengawasi dan mengkritik kebenaran atau menolak jawaban S1.

Sebagai contoh yang menarik adalah dari Kahneman (2002): “sebuah tongkat pemukul baseball dan bolanya berharga satu dolar 10 sen. Tongkat pemukul harganya satu dolar lebih mahal dari bola. Berapa harga bola?”

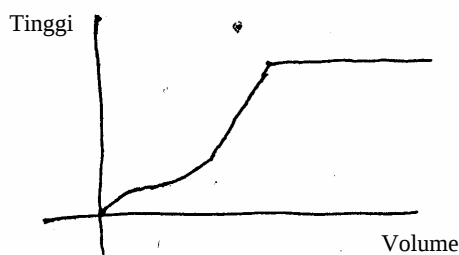
Dalam masalah ini, sebagian besar siswa menjawab 10 sen, karena besarnya uang \$1.10 dapat dibagi ke bentuk \$1 dan 10 sen, dan 10 sen adalah jawabannya. Frederick menemukan banyak orang-orang cerdas terdorong untuk menjawab dengan cepat: 50% (47/93) mahasiswa Princeton dan 56% (164/293) mahasiswa University Michiga memberikan jawaban salah”. Hal ini menunjukkan bahwa S1 mereaksi dengan cepat sehingga membajak (mengusai) perhatian ke arah materi dan mengarah ke jawaban yang tidak tepat (*non normative*).

Salah satu ciri penting penyebab seseorang menggunakan S1 adalah dekatnya dengan jawaban 10 sen. Ketika bilangan satu dolar dan 10 sen muncul dengan urutan sesuai, maka langsung menyimpulkan jawaban 10 sen. Banyak orang menerima konklusi berdasarkan S1 tanpa mengkritisnya, sehingga berperilaku irasional. Sementara untuk siswa lain, S1 dengan seketika juga mengarah pada jawaban ini, tetapi pada langkah berikutnya S2 berperan mengkritisi dan ikut mengatur sehingga memberikan jawaban benar, yaitu 5 sen. Jadi cara S1 bekerja disini muncul dengan keputusan yang sangat cepat berdasarkan pada ciri-ciri penting dari masalah dan pemahaman kasar terhadap apa yang cocok dari situasi yang diberikan.

Dalam konteks masalah kovariasi, jawaban dari subyek dapat dianalisis menggunakan *dual process theory* sebagai berikut.

Proses berpikir tahap pertama, dipengaruhi oleh kejadian yang sering dihadapi (bola dan tabung) dan biasanya diselesaikan dengan memanipulasi dan menganalisis bentuk aljabar dari rumus yang ditentukan. Dalam hal ini proses S1 lebih dominan. Setelah proses manipulasi bentuk aljabar sudah diperoleh ternyata tidak bisa digunakan untuk menyelesaikan masalah. Proses S2 ikut berperan mengontrol: ber-

arti harus mencari strategi yang lain. Dengan mengkaji pengaruh banyaknya volume terhadap ketinggian, yang dipandu dengan kombinasi proses S1 dan S2, diperoleh hubungan semakin banyak air yang dimasukkan, maka ketinggiannya akan meningkat dan diperoleh grafik berupa garis lurus. Dalam hal ini proses S2 belum berperan secara optimal, dominasi masih pada proses S1. Subyek telah menggunakan penalaran kovariasi, meskipun penalarannya masih belum sebenarnya (pseudo), yakni dengan munculnya gagasan berkaitan dengan perubahan ketinggian dipengaruhi oleh volume air: semakin banyak air yang dimasukkan semakin meningkat ketinggiannya. Pada saat dilakukan wawancara, mahasiswa tersebut baru mengaktifkan proses S2 secara maksimal. Akhirnya disadari bahwa pertambahan ketinggian berbeda pada setiap bagian bola dengan penambahan volume yang sama. Pada bagian bawah penampangnya kecil, kenaikannya cepat, semakin ke atas semakin lambat sampai pada tengah botol. Dari tengah botol sampai ke atas kenaikannya semakin cepat dan diperoleh grafik seperti berikut.



Berpikir Pseudo Penalaran Kovariasi Berdasarkan Kerangka Kerja: *Direct Translation Approach (DTA)* vs *Meaning Based Approach (MBA)* (Pape, 2004)

Menurut Pape (2004), proses berpikir yang didasari *Direct Translation Approach (DTA)* berjalan secara cepat dengan menterjemahkan suatu masalah ke kalimat matematika secara langsung tanpa dilandasi pemahaman yang bermakna (MBA). Meskipun kajian Pape pada masalah (soal cerita) dengan bahasa yang konsisten (*consistent language*) dan tidak konsisten (*inconsistent language*), namun konteks kebermaknaan terhadap suatu proses berpikir dapat ditransformasi ke masalah yang lain. Seperti hasil kerja dalam menyelesaikan tugas penalaran kovariasi, dapat dianalisis menggunakan DTA terutama dalam konteks kebermaknaan proses penalaran.

Proses berpikir tahap awal, dilakukan oleh Subyek dengan menterjemahkan (mengkaitkan) langsung bentuk botol yang berupa bola dan tabung

dengan rumus volume bola dan rumus volume tabung. Dalam hal ini kebermaknaan prosedur penalaran dengan masalah yang dihadapi adalah semu (pseudo). Pada proses berpikir tahap kedua: semakin banyak air yang dimasukkan, maka akan semakin meningkat ketinggiannya, menunjukkan sudah ada kebermaknaan penalaran, meskipun tingkatannya masih rendah. Pada proses berpikir tersebut, mahasiswa menterjemahkan (memaknai) secara langsung hubungan antara ketinggian dan volume, tanpa mengkaji cara-cara perubahan volume di setiap posisi terhadap ketinggian. Proses bernalar kovariasional mahasiswa masih belum sebenarnya (pseudo penalaran kovariasi). Dalam hal ini proses penalaran mahasiswa tersebut dapat dikelompokkan pada DTA, karena subyek menterjemahkan secara langsung masalah ke grafik tanpa mengkaji cara-cara perubahan satu variable terhadap variable yang lain di setiap posisi ketinggian botol.

IMPLIKASINYA PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Penalaran kovariasional sangat diperlukan oleh mahasiswa dalam memahami konsep-konsep matematika, seperti konsep fungsi, limit, turunan, dan integral. Zandieh (2000) menegaskan bahwa kesulitan mahasiswa dalam belajar konsep limit terkait dengan kelemahan bernalar kovariasional. Karena itu pandangan terhadap fungsi sebagai kovariasi dari nilai input ke nilai output adalah sangat penting. Namun kenyataan di kelas, kebanyakan pembelajaran fungsi dilakukan dengan cara siswa diminta untuk memanipulasi persamaan aljabar dan menghitung jawaban untuk tipe-tipe fungsi khusus. Dalam hal ini lebih banyak menekankan prosedur operasi dari pada pemahaman fungsi secara bermakna. Penekanan prosedur semacam ini tidak efektif untuk membangun konsep dasar fungsi, bahkan akan cenderung memunculkan pseudo penalaran kovariasi. Hal ini juga dapat mengakibatkan proses berpikir yang didominasi oleh proses S1 dan terjadinya proses *superficial similarities* serta *fuzzy memory*.

Untuk mengurangi munculnya pseudo penalaran kovariasi pada pembelajaran matematika (khususnya materi fungsi) dapat dilakukan dengan membangun pandangan proses terhadap fungsi, dimana siswa diminta mengeksplorasi keterkaitan variabel-variabelnya, seperti bagaimana ketinggian air dalam botol berubah terhadap volume atau bagaimana kecepatan berubah terhadap waktu, siswa perlu mulai mempertimbangkan bagaimana satu variabel (variabel terikat) berubah ketika terjadi perubahan variable lain (variabel bebas). Siswa juga perlu mengenal pengkoordinasian perubahan, sehingga mampu me-

representasikan dan menginterpretasikan perubahan bentuk grafik fungsi kejadian dinamik. Sebagai contoh, seorang siswa yang memiliki pandangan proses terhadap fungsi mungkin melihat bentuk aljabar $A(s) = s^2$ sebagai masalah menentukan luas persegi. Mereka akan memandang fungsi sebagai sebuah entitas yang menerima sebarang nilai s sebagai input dan menghasilkan nilai output luas A . Siswa tidak akan kesulitan menentukan sisi dari persegi untuk nilai luas yang diberikan. Dalam konteks ini, siswa mulai memperhatikan bahwa jika nilai s meningkat, maka nilai dari A meningkat dengan besaran yang berbeda. Lebih jauh siswa bisa memperhatikan bahwa kemiringan grafik diperoleh lebih curam pada saat s meningkat. Ketika diminta untuk menjelaskan mengapa grafik lebih curam, siswa juga akan mampu menguraikan pemahaman dari kecuraman dengan mendiskripsikan perubahan relatif dari input (sisi) dan output (luas), dengan pijakan nilai s .

KESIMPULAN

Dari kajian terhadap berpikir pseudo penalaran kovariasi dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Berpikir pseudo penalaran kovariasi yang terjadi pada tingkatan terendah identik dengan pseudo

analitik. Mahasiswa seolah-olah bernalar kovariasi, namun sebenarnya merupakan penalaran kovariasi yang semu.

2. Berpikir pseudo penalaran kovariasi yang terjadi pada tingkatan lebih tinggi identik dengan proses berpikir *Establish Experience*. Penalaran kovariasi sudah ada, namun belum merupakan penalaran kovariasi yang sesungguhnya.
3. Berpikir pseudo penalaran kovariasi dipengaruhi oleh dominannya proses system pertama (S1). Dengan intervensi proses system kedua (S2), tingkat penalarannya semakin meningkat, sebaliknya proses berpikir pseudo penalarannya semakin berkurang.
4. Berpikir pseudo penalaran kovariasi terjadi ketika mahasiswa menterjemahkan (mengkaitkan/memaknai) secara langsung hubungan dua kuantitas dengan mengabaikan cara-cara perubahan satu kuantitas terhadap kuantitas yang lain.

Untuk mengurangi timbulnya pseudo penalaran kovariasi, dalam pembelajaran matematika (terutama materi fungsi) perlu menekankan pada pandangan proses.

DAFTAR RUJUKAN

- Carlson, M. 1998. A Cross-sectional Investigation of the Development of the Function Concept. In E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld, & J.J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, III. Issues in Mathematics Education*, 7: 115-162.
- Carlson, M. & Larsen, S. 2001. Integrating a Models and Modeling Perspective with Existing Research and Practice. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism in Mathematics Teaching and Learning: A Models & Modeling Perspective* (hlm. 216-257). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Carlson, M. & Larsen, H. 2002. Applying Covariational Reasoning while Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (3): 352-378.
- Leron, U. 2005. Intuitive vs Analytical Thiking: The Four Theoretical FrameWork, (Online), (<http://edu.technion.ac.il/Faculty/uril>), diakses 14 Maret 2005
- Lithner, J. 2000. Mathematical Reasoning in Task Solving. *Educational Studies in Mathematics*, 41: 165-190.
- Pape, S. 2004. Middle School Children's Problem Solving Behavior: A Cognitive Analysis from a Reading Comprehension Perspective. *Jurnal for Research in Mathematics Education*, 35 (3): 187-219.
- Pyke, C. 2003. The Use of Symbols, Word, and Diagrams as Indicators of Mathematical Cognition: A Causal Model. *Jurnal for Research in Mathematics Education*, 34 (5): 406-432.
- Slavit, D. 1997. An Alternate Route to the Reunification of Function. *Educational Studies in Mathematics*, 33: 259-281.
- Subanji. 2004. *Kemampuan Penalaran Kovariasional Mahasiswa dalam Merepresentasikan Grafik untuk Kejadian Dinamik*. Makalah disajikan dalam Seminar Nasional di ITS Surabaya, tanggal 4 Desember 2004.
- Subanji. 2005. *Pandangan Aksi versus Pandangan Proses dari Fungsi Serta Dampaknya terhadap Pemahaman Konsep*. Makalah disajikan dalam Seminar Nasional di UNESA Surabaya, tanggal 17 Desember 2005.
- Vinner, S. 1997. The Pseudo Conceptual and the Pseudo Analytical Thought Processes in Mathematics Learning. *Educational Studies in Mathematics*, 34: 97-129.
- Zandieh, M. 2000. A Theoretical Framework for MAA Student Understanding of the Concept of Derivative. *Issue in Mathematics Education*, 8: 103-127.

